20. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
05 - 09 Eylül 2017, Uludağ Üniversitesi, Bursa

FİBONACCİ SIRALAMA YÖNTEMİ İLE BAGLEY-TORVİK DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Ayşe Kurt Bahşı[1], Mehmet Sezer[2], M. Mustafa Bahşı[3]
[1,2]Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Manisa
[3]Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Kırkağaç Meslek Yüksekokulu, Manisa

ABSTRACT

In this study, it is aimed to find the numerical solution of Bagley-Torvik equation by Fibonacci collocation method. This method is a numerical method based on Fibonacci polynomials and collocation points. An extended series expansion of Fibonacci polynomials is described to solve the Bagley-Torvik equation, a class of fractional differential equations. By obtaining the matrix expression of this expansion, matrix expressions of all terms of the equation are found. Fibonacci polynomial solutions of the equation are obtained by using the appropriate collocation points, which are transformed into equation matrix equation with the matrix expressions found. Numerical example was solved to examine the effectiveness and correctness of the method and the results obtained were compared with the results of other known methods with the aid of tables and graphs. All numerical calculations were made with the aid of the MAPLE symbolic program.

ÖZET

Bu çalışmamızda Fibonacci sıralama yöntemi ile Bagley-Torvik denkleminin sayısal çözümünün bulunması amaçlanmıştır. Fibonacci sıralama yöntemi Fibonacci polinomlarına ve sıralama noktalarına dayalı bir sayısal yöntemdir. Kesirli türevli diferansiyel denklemlerin bir sınıfı olan Bagley-Torvik denklemini çözmek için Fibonacci polinomlarının genişletilmiş bir seri açılımı tanımlanmıştır. Bu açılımın matris ifadesi elde edilerek denklemin tüm terimlerinin matris ifadeleri bulunmuştur. Bulunan matris ifadeleri ile denklem matris denklemine dönüştürülmüş, uygun sıralama noktaları kullanılarak denklemin Fibonacci polinom çözümleri elde edilmiştir. Yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu incelemek için sayısal örnek çözülmüş ve elde edilen sonuçlar bilinen diğer yöntemlerin sonuçları ile tablo ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır. Tüm sayısal hesaplamalar MAPLE sembolik programı yardımıyla yapılmıştır.

GİRİŞ

Fibonacci sıralama yöntemi, ilk olarak lineer diferansiyel denklemler, integral ve integro-diferansiyel denklemler için geliştirilmiştir [1]. Yöntem daha sonra fark denklemlerine [2], integral denklemlere [3], pantograf denklemlere [4] ve Volterra integro denklemlere [5] uygulanmıştır. Ayrıca yöntem kısmi diferansiyel denklemlerin çeşitli sınıflarına uygulanmıştır [6, 7]. Bu çalışmada yöntem genişletilmiş Fibonacci serileri kullanılarak Bagley-Torvik denklemine uygulanacaktır. Kesirli türevli diferansiyel denklemlerin bir sınıfı olan bu denklem

$$AD^2y(x) + BD^{(3/2)}y(x) + Cy(x) = g(x), \qquad 0 \le x \le b$$

sınır koşulları

$$y(0) = \gamma_1, \qquad y(b) = \gamma_2$$

ile tanımlanır [8]. Bagley-Torvik denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için hibrit fonksiyon yaklaşım yöntemi [8], Bessel sıralama yöntemi [9], Chebyshev wavalet yöntemi [10], kesirli Taylor Yöntemi [11], Haar wavelet [12], ayrık spline yöntemi [13] ve Laplace dönüşüm yöntemi [14] araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada kesirli türev için Caputo tanımı

$$D^{\alpha}c = 0, (c\ sabit)$$

$$D^{\alpha}x^{\beta} = \begin{cases} 0 & , \quad \beta \epsilon \mathbb{N}_0\ ve\ \beta < \lceil \alpha \rceil \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}x^{\beta-\alpha} & , \quad diğer \end{cases}$$

kullanılacaktır [15]. Birçok fiziksel sitemin matematiksel modellemesinde karşılaşıldığından dolayı kesirli türevli denklemler uygulamalı bilimler ve mühendislik alanlarında çalışma yapan birçok araştırmacı tarafından çalışmalarında ele alınmıştır.

FİBONACCİ SIRALAMA YÖNTEMİ

Bagley-Torvik diferansiyel denkleminin sayısal çözümü için

$$y(x) \cong y_{N\alpha}(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n F_n^{\alpha}(x)$$

N kesme sınırı ile kesilmiş serisini tanımlayalım. Burada genişletilmiş Fibonacci polinomları

$$F_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k} x^{(n-2k-1)\alpha}, \qquad [(n-1)/2] = \begin{cases} \dfrac{n-2}{2}, n\ çift \\ \dfrac{n-1}{2}, n\ tek \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır. $y_{N\alpha}(x)$ Fibonacci polinom çözümünün matris ifadesi

$$y_{N\alpha}(x) = \mathbf{X}_{\alpha}(x)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

ile verilir. Burada,

$$\mathbf{X}_{\alpha}(x) = [1 \quad x^{\alpha} \quad x^{2\alpha} \quad \dots \quad x^{(N-1)\alpha}]$$

ve

$$\mathbf{A} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_N]^{\mathrm{T}}$$

dir.

Ayrıca Fibonacci polinomlarının geçiş matrisi olarak tanımlanan **C** matrisi kesme sayısının tek veya çift olmasına göre aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

Eğer N çift ise;

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{1} & 0 & \binom{2}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{2}{1} & 0 & \binom{3}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{(n-2)/2}{(n-2)/2} & 0 & \binom{n/2}{(n-4)/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{n/2}{(n-2)/2} & 0 & \binom{(n+2)/2}{(n-4)/2} & \cdots & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix}$$

Eğer N tek ise;

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{1} & 0 & \binom{2}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{2}{1} & 0 & \binom{3}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{(n-1)/2}{(n-3)/2} & 0 & \binom{(n+1)/2}{(n-5)/2} & \cdots & 0 \\ \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \binom{(n+1)/2}{(n-3)/2} & 0 & \cdots & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan Fibonacci polinom çözümünün ikinci mertebe türev ifadesi

$$D^2 y_{N\alpha}(x)=\mathbf{X}_\alpha^{(2)}(x)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

ve Caputo tanımı kullanılarak mertebeden kesirli türev ifadesi

$$D^{(3/2)} y_{N\alpha}(x)=\mathbf{X}_\alpha^{(3/2)}(x)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

matris denklemleri ile tanımlanır. Burada

$$\mathbf{X}_\alpha^{(2)}(x)=[0 \quad \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \quad 2\alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2} \quad \ldots \quad (N-1)\alpha((N-1)\alpha-1)x^{(N-1)\alpha-2}]$$

ve

$$\mathbf{X}_\alpha^{(3/2)}(x)=[D^{(3/2)}\,1 \quad D^{(3/2)}\,x^{\alpha} \quad D^{(3/2)}\,x^{2\alpha} \quad \ldots \quad D^{(3/2)}\,x^{\alpha(N-1)}]$$

olarak tanımlanmıştır. Elde edilen tüm matris ifadeleri denklemde yerine konularak matris denklemi

$$A\mathbf{X}_\alpha^{(2)}(x)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}+B\mathbf{X}_\alpha^{(3/2)}(x)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}+C\mathbf{X}_\alpha(x)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=g(x)$$

elde edilir. Bu denkleme problemin tanım aralığını eşit aralıklara bölen

$$x_i=\frac{b}{N-1}(i-1), \qquad i=1,2,\ldots,N$$

sıralama noktaları uygulanarak problemin temel matris denklemi $\mathbf{W} = A\mathbf{X}_{\alpha}^{(2)}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + B\mathbf{X}_{\alpha}^{(3/2)}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + C\mathbf{X}_{\alpha}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ olmak üzere

$$\mathbf{WA} = \left(A\mathbf{X}_{\alpha}^{(2)}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + B\mathbf{X}_{\alpha}^{(3/2)}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + C\mathbf{X}_{\alpha}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{A} = \mathbf{G}$$

olarak bulunur. Burada

$$\mathbf{X}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & {x_1}^{\alpha} & {x_1}^{2\alpha} & \cdots & {x_1}^{(N-1)\alpha} \\ 1 & {x_2}^{\alpha} & {x_2}^{2\alpha} & \cdots & {x_2}^{(N-1)\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & {x_N}^{\alpha} & {x_N}^{2\alpha} & \cdots & {x_N}^{(N-1)\alpha} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_{\alpha}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(\alpha-1){x_1}^{\alpha-2} & 2\alpha(2\alpha-1){x_1}^{2\alpha-2} & \cdots & (N-1)\alpha((N-1)\alpha-1){x_1}^{(N-1)\alpha-2} \\ 0 & \alpha(\alpha-1){x_2}^{\alpha-2} & \alpha(2\alpha-1){x_2}^{2\alpha-2} & \cdots & (N-1)\alpha((N-1)\alpha-1){x_2}^{(N-1)\alpha-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha(\alpha-1){x_N}^{\alpha-2} & \alpha(2\alpha-1){x_N}^{2\alpha-2} & \cdots & (N-1)\alpha((N-1)\alpha-1){x_N}^{(N-1)\alpha-2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{X}_{\alpha}^{(3/2)} = \begin{bmatrix} D^{(3/2)}\,1\big|_{x=x_1} & D^{(3/2)}\,x^{\alpha}\big|_{x=x_1} & D^{(3/2)}\,x^{2\alpha}\big|_{x=x_1} & \cdots & D^{(3/2)}\,x^{\alpha(N-1)}\big|_{x=x_N} \\ D^{(3/2)}\,1\big|_{x=x_2} & D^{(3/2)}\,x^{\alpha}\big|_{x=x_2} & D^{(3/2)}\,x^{2\alpha}\big|_{x=x_2} & \cdots & D^{(3/2)}\,x^{\alpha(N-1)}\big|_{x=x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{(3/2)}\,1\big|_{x=x_N} & D^{(3/2)}\,x^{\alpha}\big|_{x=x_N} & D^{(3/2)}\,x^{2\alpha}\big|_{x=x_N} & \cdots & D^{(3/2)}\,x^{\alpha(N-1)}\big|_{x=x_N} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanmıştır. Diğer taraftan temel matris bağıntıları ile problemin sınır koşullarının matris ifadeleri

$$y_{N\alpha}(0) = \mathbf{X}_{\alpha}(0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{U_1A} = \gamma_1 \text{ ve } y_{N\alpha}(b) = \mathbf{X}_{\alpha}(b)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{U_2A} = \gamma_2$$

olarak elde edilir. Temel matris denklemimdeki uygun satırların silinerek problemin sınır koşullarının silinen satırlarının yerine yazılmasıyla

$$\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{G}}$$

matris denklemi bulunur. Burada

$$\widetilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{(N-2)1} & w_{(N-2)2} & w_{(N-2)3} & \cdots & w_{(N-2)N} \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2N} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{N-1}) \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

dir. Bulunan bu matris denkleminden Fibonacci polinom çözümünün bilinmeyen katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{W}}^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}$$

şeklinde bulunur. Bulunan **A** katsayılar matrisi

$$y_{N\alpha}(x) = \mathbf{X}_\alpha(x)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

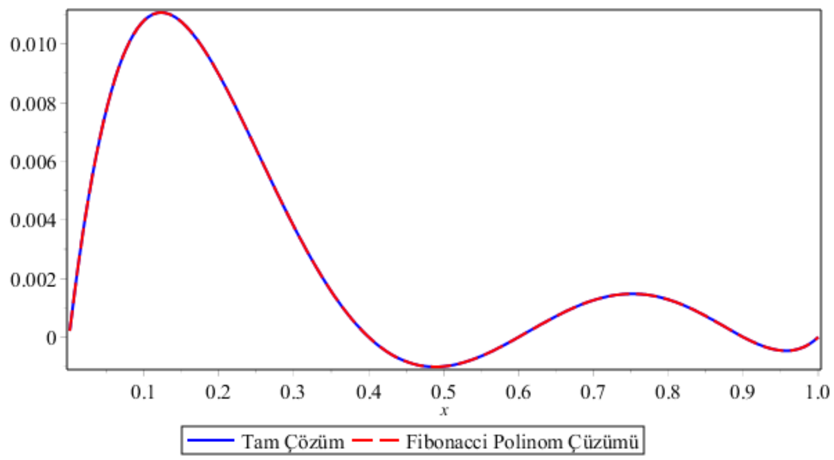
matris denkleminde yazılarak Bagley-Torvik denkleminin Fibonacci polinom çözümü bulunur.

SAYISAL SONUÇLAR

$A = 1, B = 8/17$ ve $C = 13/51$ katsayıları ve $y(0) = 0, y(1) = 0$ sınır şartları için problem [0,1] aralığında tanımlıdır. Denklemin tam çözümü

$$y(x) = \frac{27}{125}x - \frac{339}{250}x^2 + \frac{76}{25}x^3 - \frac{29}{10}x^4 + x^5$$

olarak verilmiştir [9]. Fibonacci polinom çözümü $N = 12$ ve $\alpha = 0.5$ için elde edilmiştir. Problemin elde edilen çözümün problemin tam çözümü ile karşılaştırılması Şekil 1'de sunulmuştur. Fibonacci polinom çözümü ile problemin tam çözümü çakışmıştır.



Şekil 1. $N = 12$ ve $\alpha = 0.5$ için Fibonacci polinom çözümü ile problemin tam çözümünün karşılaştırılması

Çizelge 1' de Fibonacci polinom çözümü ile Bessel sıralama yöntemi ve Haar Wavelet yöntemi ile elde edilen çözümlerin mutlak hata değerlerinin karşılaştırılması verilmiştir. Elde edilen sayısal değerlerden de görüleceği üzere yöntem diğer iki yönteme göre ele alınan örnek için daha iyi sonuçlar vermiştir.

Çizelge 1. Fibonacci polinom çözümün ve diğer yöntemler ile elde edilen çözümlerin hata değerlerinin karşılaştırılması

x_i	Fibonacci Sıralama Yöntemi	Bessel Sıralama Yöntemi [9]	Haar Wavelet Yöntemi [12]
0.1	$8.9924e-33$	$1.0800e-02$	$3.5974e-03$
0.2	$1.1262e-32$	$8.9595e-03$	$1.5828e-03$
0.3	$1.2326e-32$	$3.7797e-03$	$1.7866e-03$
0.4	$1.2667e-32$	$1.4413e-07$	$1.6343e-03$
0.5	$1.2464e-32$	$1.0001e-03$	$1.1578e-03$
0.6	$1.1801e-32$	$6.6150e-08$	$5.8356e-04$
0.7	$1.0720e-32$	$1.2599e-03$	$1.2710e-04$
0.8	$9.2447e-33$	$1.2800e-03$	$1.1967e-04$
0.9	$7.3820e-33$	$2.0656e-08$	$5.5406e-04$

SONUÇLAR

Bu çalışmada Bagley-Torvik denkleminin sayısal çözümlerini bulmak için Fibonacci sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Ele alınan denklem için Fibonacci sıralama algoritması geliştirilmiş ve geliştirilen bu algoritmalar sayısal probleme uygulanmıştır. Bu sayede yöntemin doğruluğu ve etkinliği araştırılmış, elde edilen bulgular şekiller ve tablolar kullanılarak sunulmuştur. Fibonacci sıralama metodu ile bulunan Fibonacci polinom çözümleri diğer sayısal yöntemler ile bulunmuş olan çözümler ile karşılaştırılmıştır. Yöntemin literatürde bilinen diğer yöntemlere göre problemin tam çözüme daha çok yaklaştığı sonucuna varılmıştır. Ayrıca kesme sınırının artırılmasıyla yani polinom çözümünün mertebesinin artmasıyla problemin tanımlı olduğu bölgedeki mutlak maksimum hata değerinin azaldığı gözlemlenmiştir. Kesme sınırının arttırılmasının, geliştirilen sembolik programın çözümü verme süresini artıracağı gerçeğinin dikkate alınması gerekir. Çok büyük olmayan kesme sınırlarında dahi tam çözüme yakın yaklaşık çözümler bulunması ve Fibonacci sıralama metodunun sembolik işlemlerden çok sayısal işlemlere dayalı olması hızlı ve etkili çözümler almamızı sağlamıştır.

KAYNAKLAR

[1] Kurt A. *Lineer diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin Fibonacci polinom çözümleri.* Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2012.
[2] A. Kurt, S. Yalçınbaş, M. Sezer, Fibonacci collocation method for solving linear differential-difference equations. *Mathematical and Computational Applications*. 8(3) (2013) 448-458.
[3] A. Kurt, S. Yalçınbaş, M. Sezer, Fibonacci collocation method for solving high-order linear Fredholm integro-differential-difference equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.* 2013, DOI: 10.1155/2013/486013.
[4] A. Kurt Bahşı, N. Şahin, M. Sezer, A numerical algorithm with residual error estimation for solution of high-order pantograph-type functional differential equations using Fibonacci polynomials. *New Trends in Mathematical Sciences*. 3(3) (2015) 90-102.
[5] A. Kurt Bahşı, S. Yalçınbaş, Fibonacci collocation method with a residual error function to solve linear Volterra integro differential equations. *New Trends in Mathematical Sciences*. 4(1) (2016) 1-14.
[6] A. Kurt Bahşı, S. Yalçınbaş, A new algorithm for the numerical solution of Telegraph equations by using Fibonacci polynomials. *Mathematical and Computational Applications*. 21(2) (2016) 15.
[7] A. Kurt Bahşı, S. Yalçınbaş, Numerical solutions and error estimations for the space fractional diffusion equation with variable coefficients via Fibonacci collocation method. *SpringerPlus*. 5(1) (2016) 1375.
[8] M. Somayeh, M. Razzaghi, Numerical solution of the fractional Bagley-Torvik equation by using hybrid functions approximation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 39(3) (2016) 353-365.
[9] Ş. Yüzbaşı, Numerical solution of the Bagley–Torvik equation by the Bessel collocation method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 363 (2013) 300-312.
[10] S. Amit, Y. Liu, A.S. Vatsala, The solution of the Bagley-Torvik equation by using second kind Chebyshev wavelet. *Information Technology: New Generations (ITNG)*, 2014 11th International Conference on. IEEE, 2014.
[11] V.S. Krishnasamy, M. Razzaghi, The numerical solution of the Bagley–Torvik equation with fractional Taylor method. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 11(5) (2016).

[12] M. Rehman, R. A. Khan, A numerical method for solving boundary value problems for fractional differential equations. *Applied Mathematical Modelling*. 36(3) (2012) 894-907.
[13] W.K. Zahra, M. V. Daele, Discrete spline methods for solving two point fractional Bagley–Torvik equation. *Applied Mathematics and Computation*. 296 (2017) 42-56.
[14] W. Labecca, O. Guimarães, J.R.C. Piqueira, Analytical solution of general Bagley-Torvik equation. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015 (2015).